Technische Mechanik

1. Einleitung
2. Statik des starren Körpers
   2.1 Äquivalenz von Kräftegruppen am starren Körper
   2.2 Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt
   2.3 Ebene Kräftegruppe am starren Körper
   2.4 Moment einer Kraft
   2.5 Moment eines Kräftepaares
   2.6 Räumliche Kräftegruppe am starren Körper
   2.7 Zentralachse, Kraftschraube

IDS
Institut für Dynamik und Schwingungen
Leibniz Universität Hannover

Äquivalenz von Kräftegruppen am starren Körper

Äquivalenz von Kräftegruppen:

Kräftegruppen nennen wir äquivalent, wenn sie am starren Körper die gleichen Wirkungen hervorrufen

Gleichgewichtssystem:

Kräftegruppe, die äquivalent zur Kraft Null ist

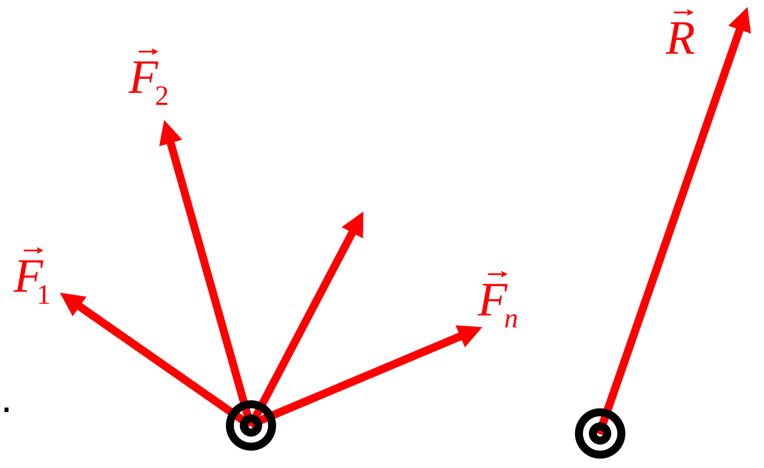
IDS
Institut für Dynamik und Schwingungen
Leibniz Universität Hannover

Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt

Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt können wie Vektoren addiert werden.

Resultierende:

Jede Gruppe von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt kann auf eine Einzelkraft reduziert werden, die gleich der Vektorsumme (Resultierende) ist.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$$

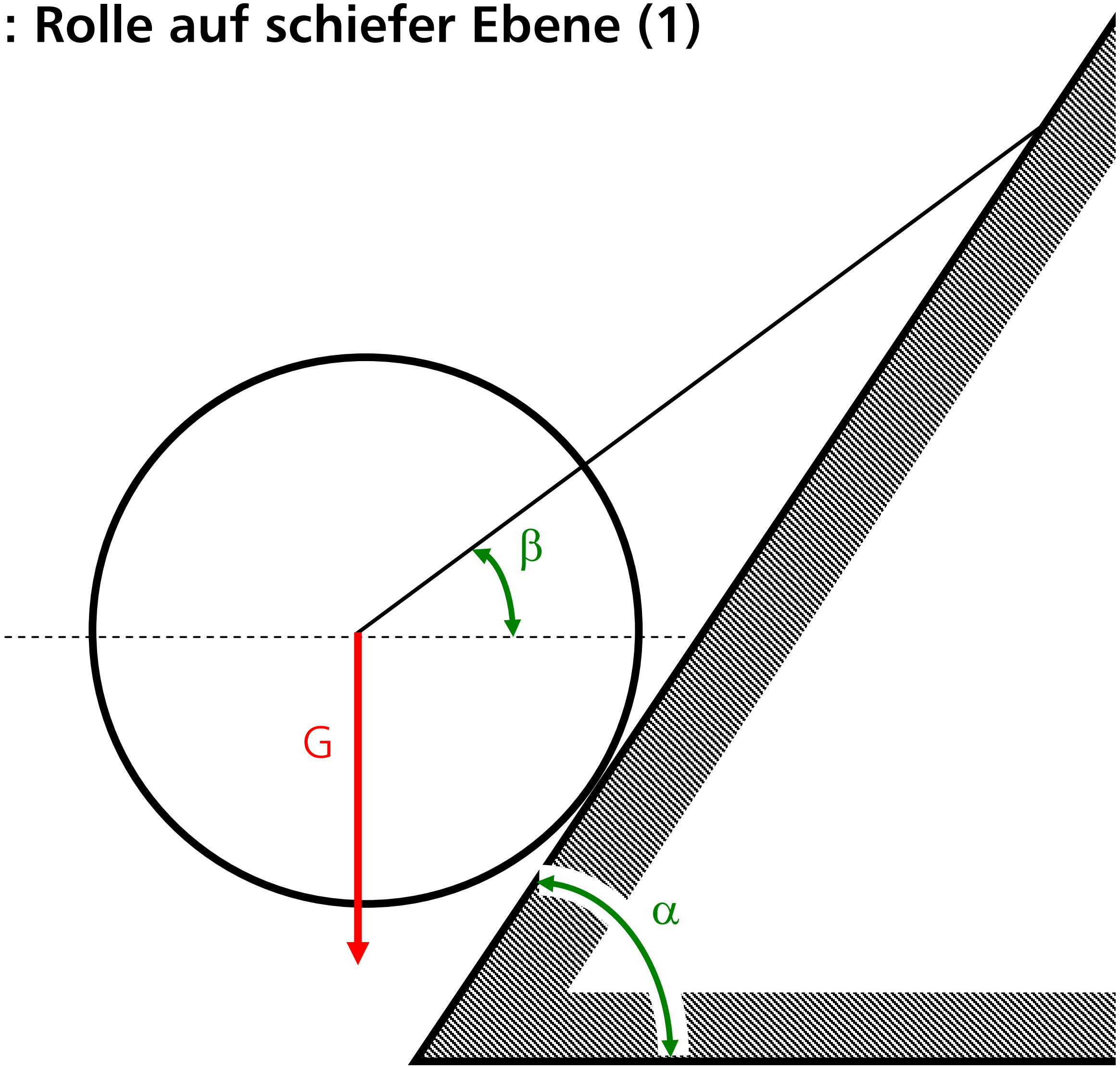
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$$

Gleichgewichtsbedingung:

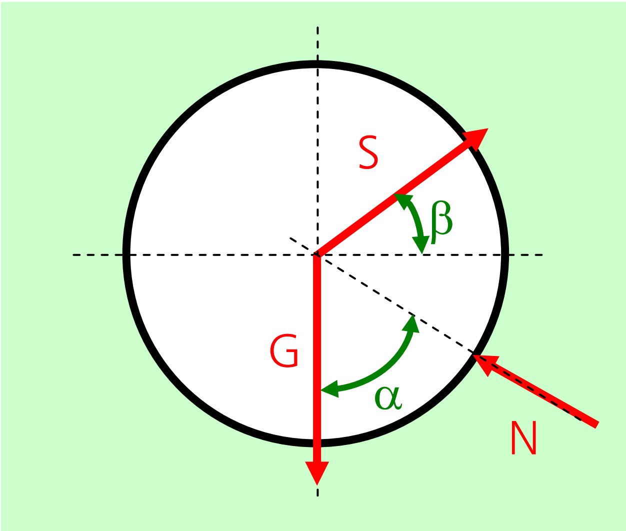
Wenn die auf einen starren Körper wirkenden Kräfte durch einen Punkt gehen und der Körper im Gleichgewicht ist, so ist die Resultierende gleich Null.

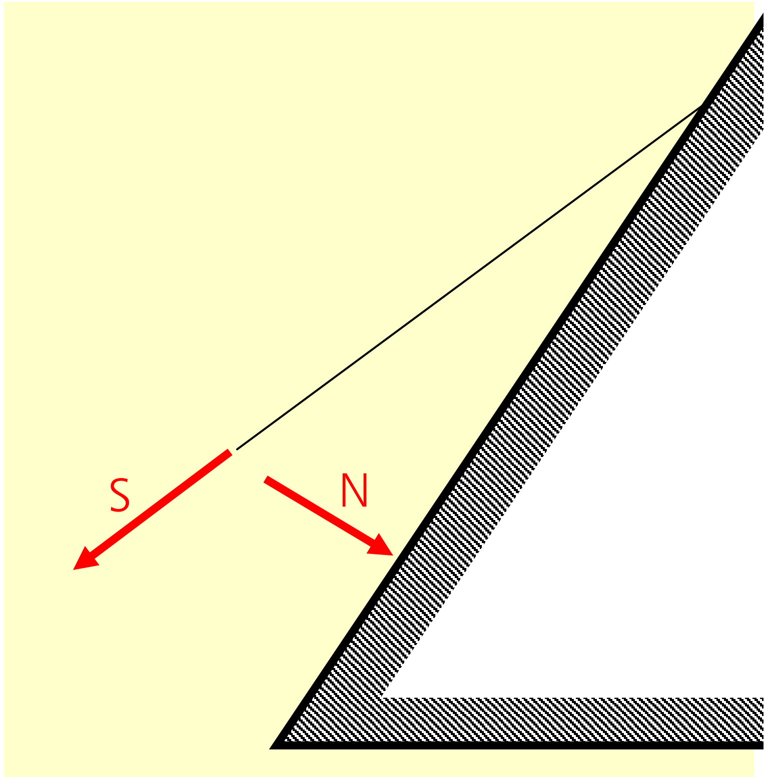
Beispiel: Rolle auf schiefer Ebene (1)



Beispiel: Rolle auf schiefer Ebene (2)

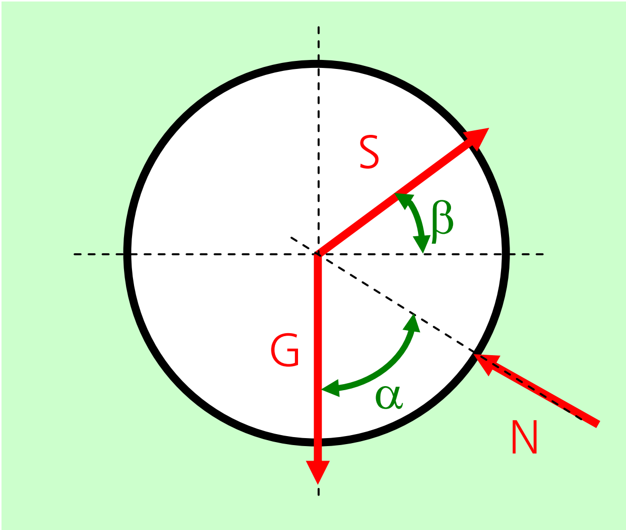
Freischneiden



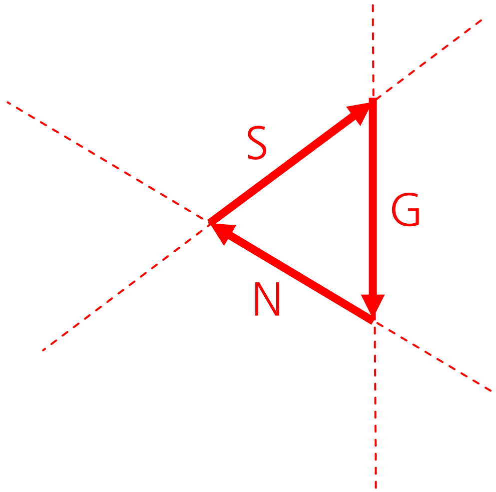


Gewichtskraft G ist eingeprägte Kraft, Seilkraft S und Normalkraft N sind Reaktionskräfte

Beispiel: Rolle auf schiefer Ebene (3)



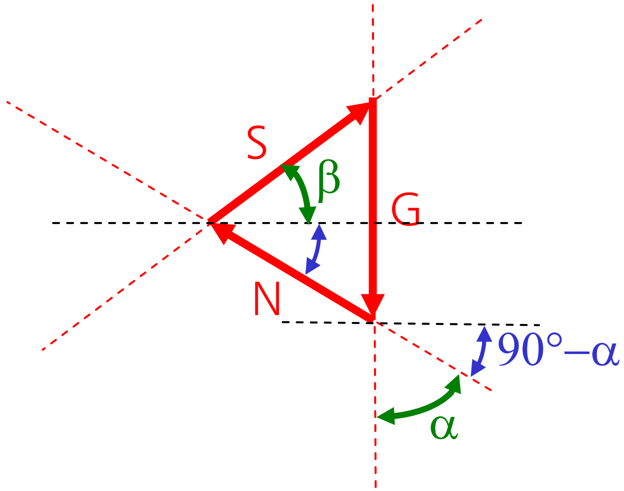
Lösungsidee: Wenn Rolle in Gleichgewicht, dann ist die Resultierende (Vektorsumme der Gewichtskraft, Seilkraft und Normalkraft) gleich Null, d.h. Kräfte bilden ein geschlossenes Dreieck.

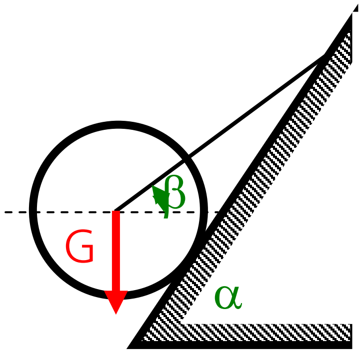


Gegeben:

- Größe und Richtung der Gewichtskraft G
- Richtung der Seilkraft S
- Richtung der Normalkraft N

Beispiel: Rolle auf schiefer Ebene (4)





Sinussatz: $$\frac{S}{\sin\alpha} = \frac{G}{\sin(90° - \alpha + \beta)} = \frac{N}{\sin(90° - \beta)}$$

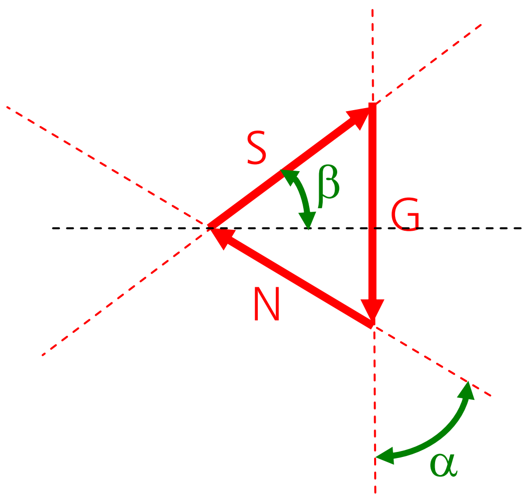
$$\sin(90° - \alpha + \beta) = \cos(\alpha - \beta)$$
$$\sin(90° - \beta) = \cos\beta$$

$$\boxed{S = \frac{G\sin\alpha}{\cos(\alpha - \beta)}}$$

$$\boxed{N = \frac{G\cos\beta}{\cos(\alpha - \beta)}}$$

Kontrolle: Für $\alpha = 0°$ ist $S = 0$ und $N = G$, unabhängig von β (solange $\beta \neq 90°$).

Beispiel: Rolle auf schiefer Ebene (5)



$$\sum F_{i,x} = 0: \quad -N \sin\alpha + S\cos\beta = 0$$

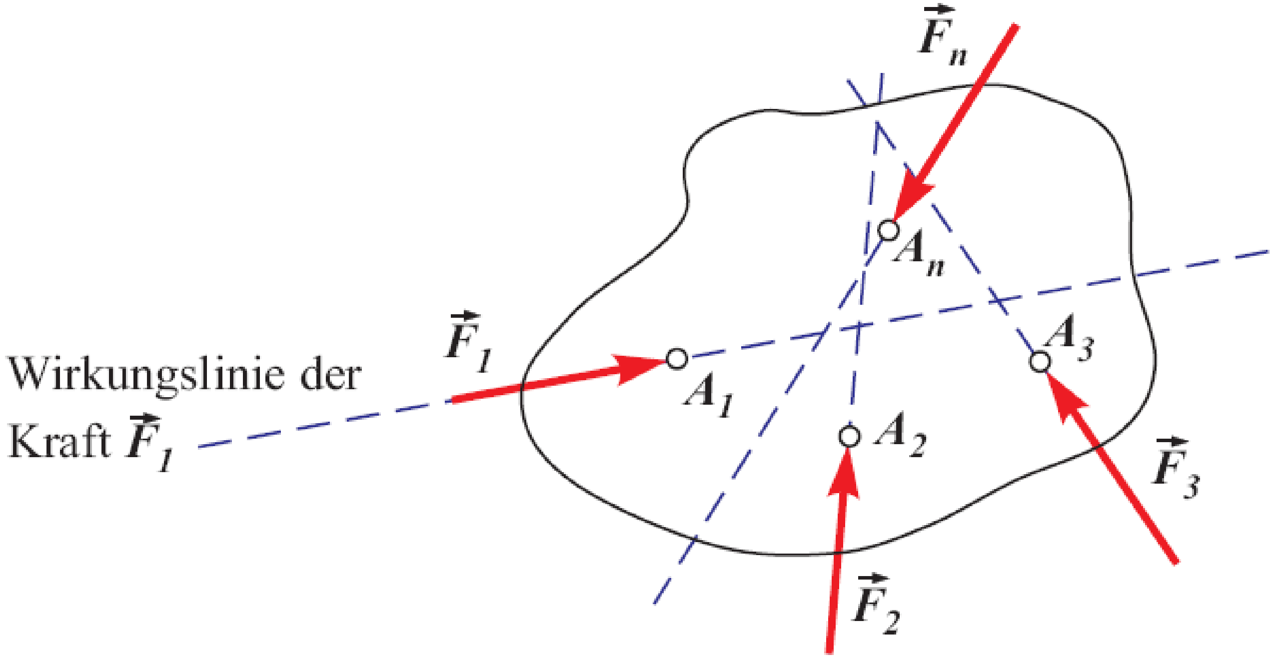
$$\sum F_{i,y} = 0: \quad N\cos\alpha + S\sin\beta - G = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\sin\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & \sin\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem für die beiden Unbekannten S und N

Technische Mechanik

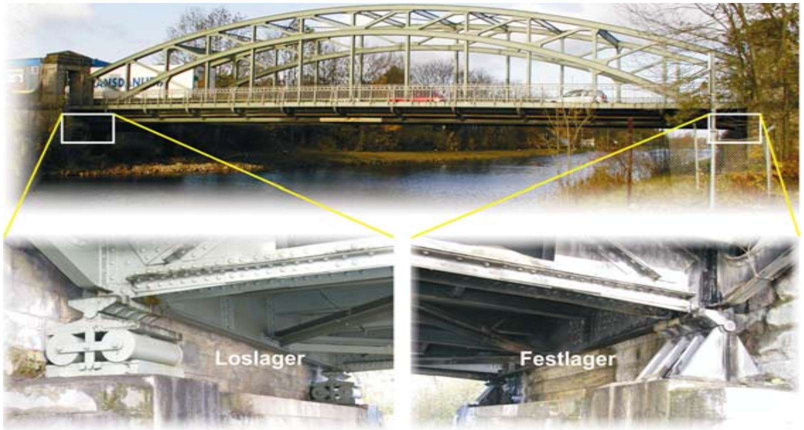
Ebene Kräftegruppe am starren Körper

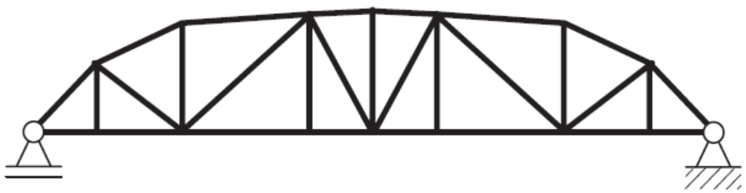


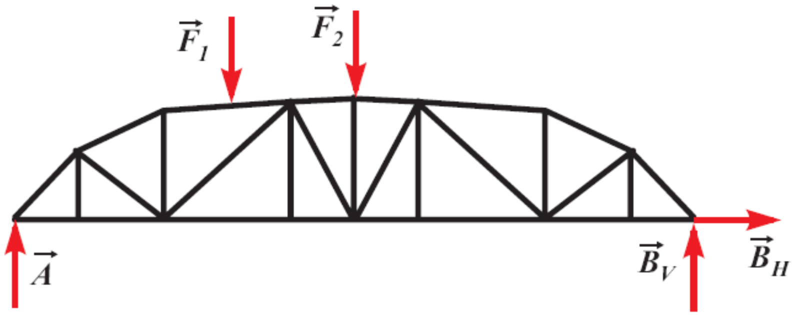
Ebene Kräftegruppe: Wirkungslinien aller Kräfte liegen in einer Ebene


Brücke über den Stichkanal Hannover - Linden
Loslager
Festlager

Beispiel: Brücke in Hannover-Linden



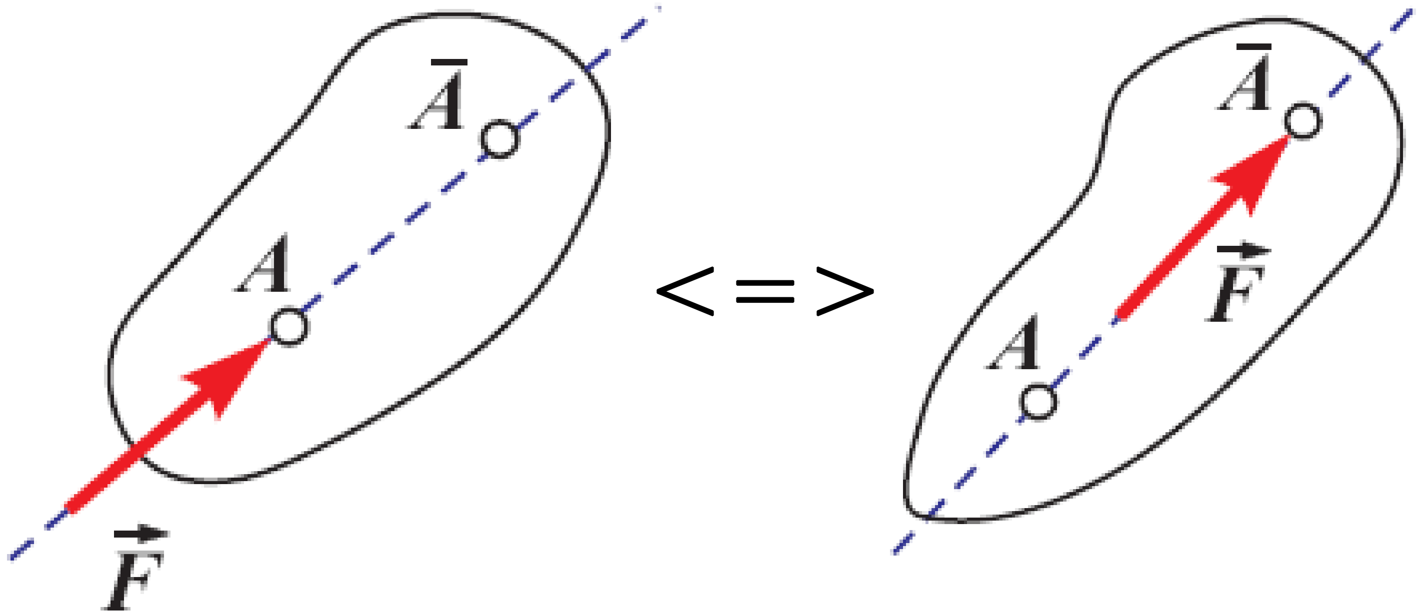




Vereinfachende Annahmen bei der **Modellbildung**:

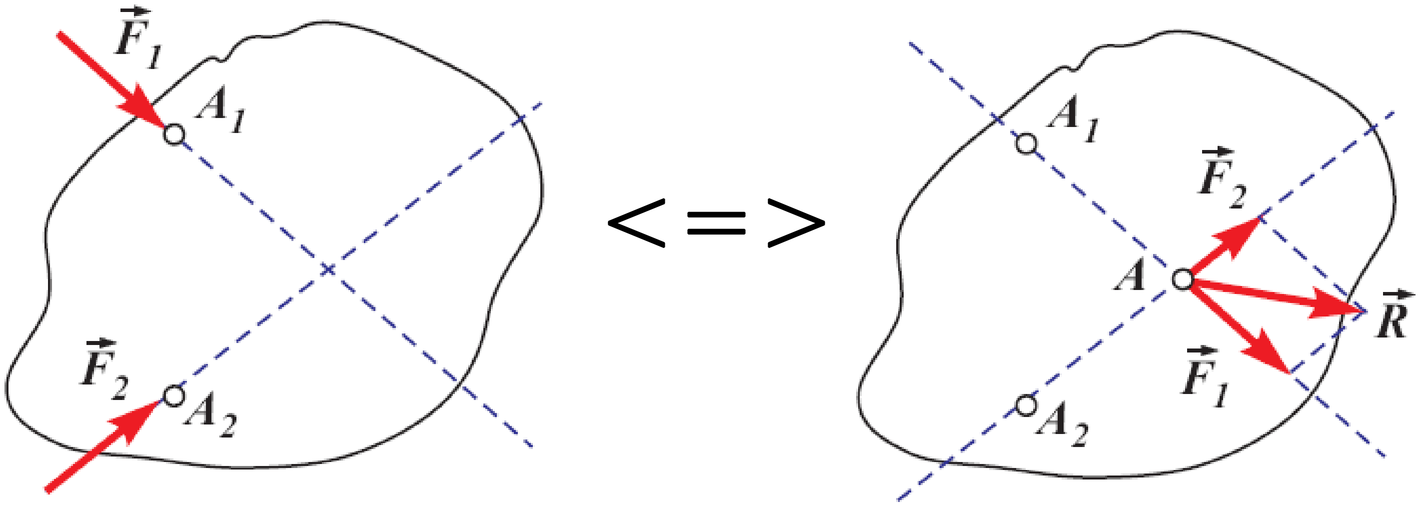
- Brücke ist starr
- Gewichtskraft wirkt in Schwerpunkt
- Betrachtung als ebene Struktur, alle Kräfte wirken in der Ebene
- Festlager, Loslager

Axiom der Linienflüchtigkeit einer Kraft



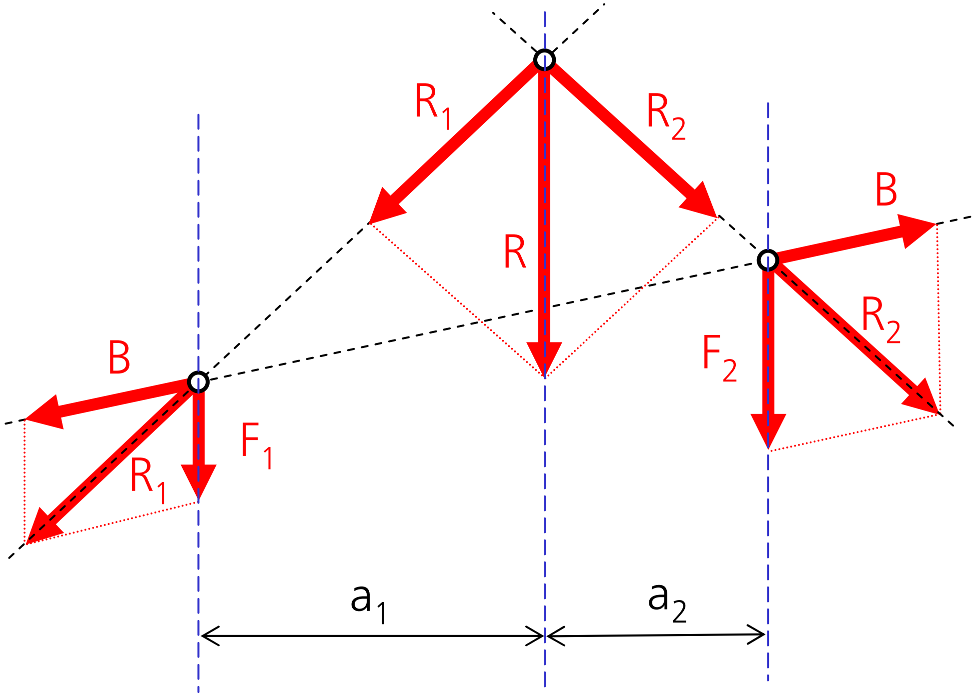
- Die am starren Körper von einer Kraft hervorgerufene Wirkung ändert sich nicht, wenn die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie verschoben wird.

Zusammensetzung von 2 Kräften, Wirkungslinien schneiden sich



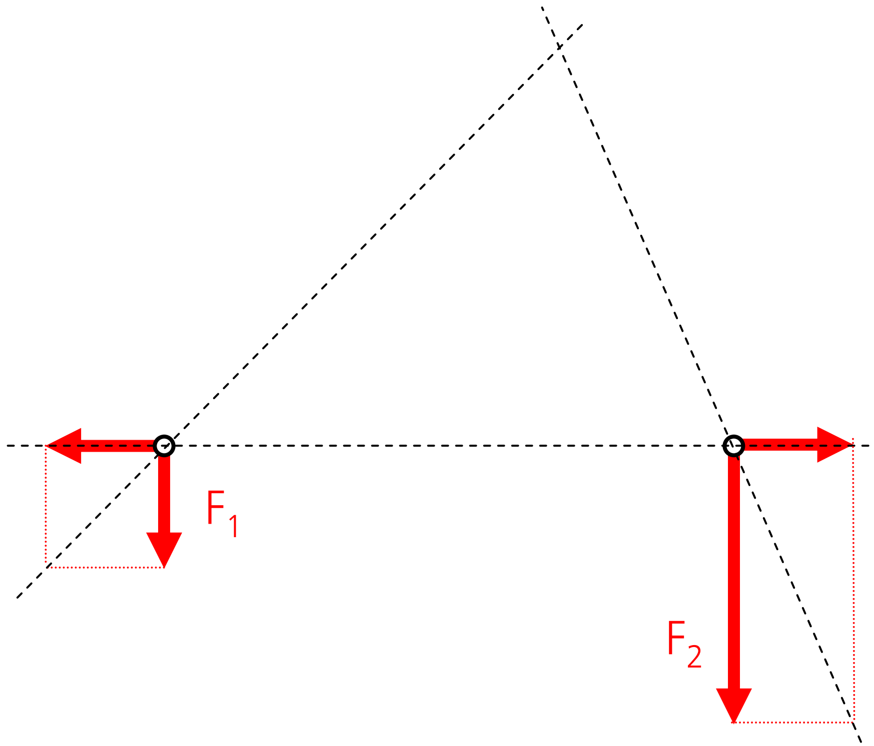
- Verschiebe die Kräfte längs ihrer Wirkungslinie, so dass sie am Schnittpunkt der Wirkungslinien angreifen
- Fasse die Kräfte nach der Parallelogrammregel zusammen

Zusammensetzung von 2 Kräften, Wirkungslinien parallel



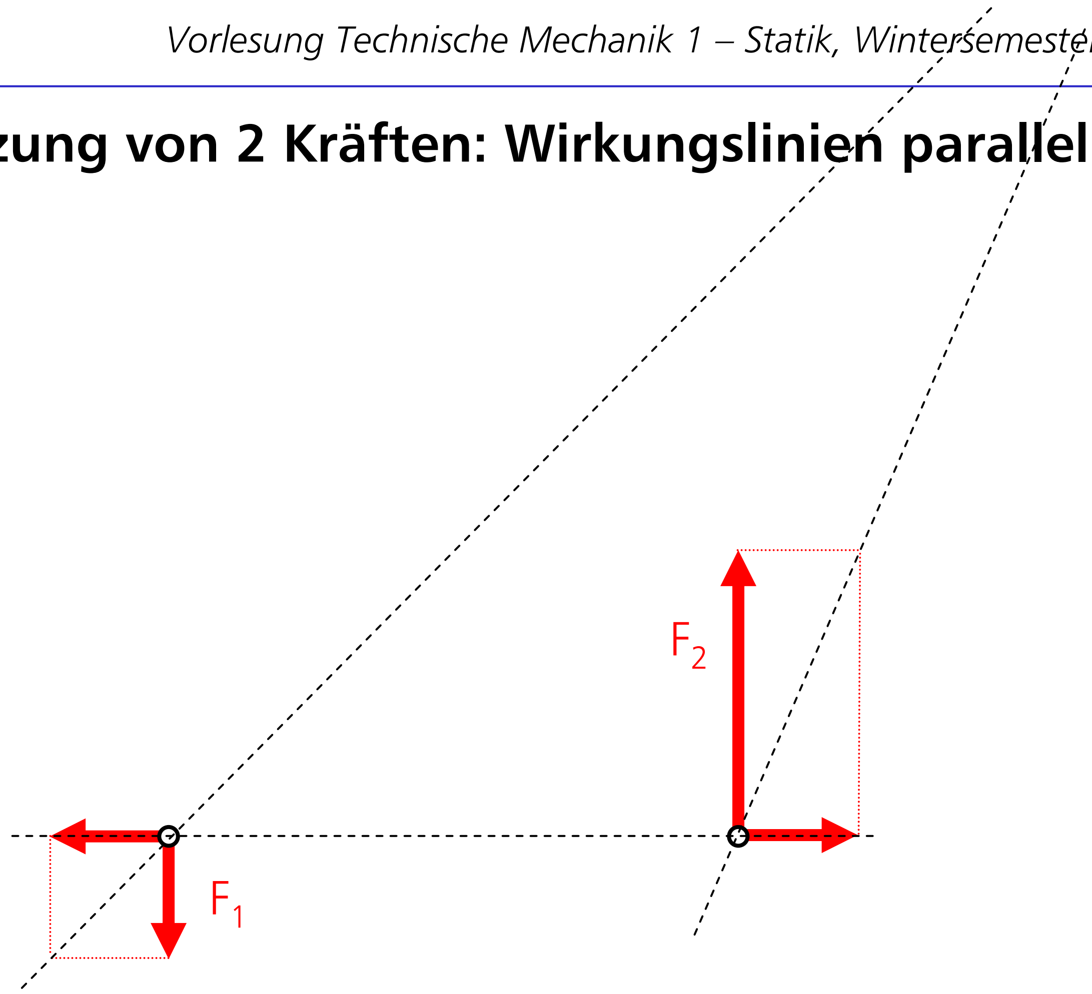
- Füge eine Gleichgewichtsgruppe hinzu, deren Wirkungslinie durch die Angriffspunkte der beiden Kräfte verläuft
- Fasse die Kräfte in den beiden Kraftangriffspunkten zu (Zwischen-) Resultierenden zusammen
- Fasse danach die beiden (Zwischen-) Resultierenden zur (Gesamt-) Resultierenden zusammen

Zusammensetzung von 2 Kräften: Wirkungslinien parallel



- Wenn die beiden Kräfte den gleichen Richtungssinn haben, liegt die Wirkungslinie der Resultierenden zwischen den Wirkungslinien der beiden Kräfte.

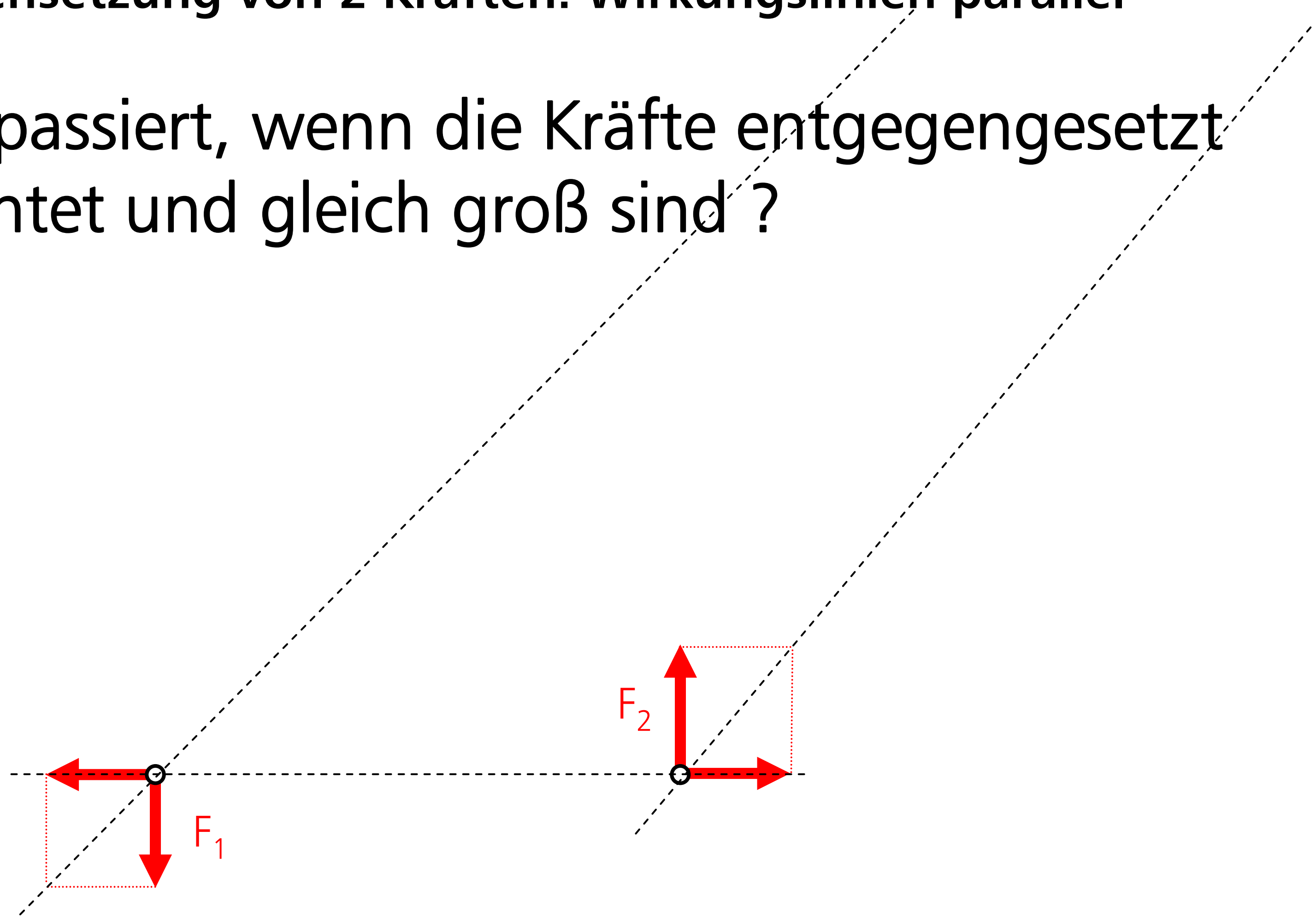
Zusammensetzung von 2 Kräften: Wirkungslinien parallel



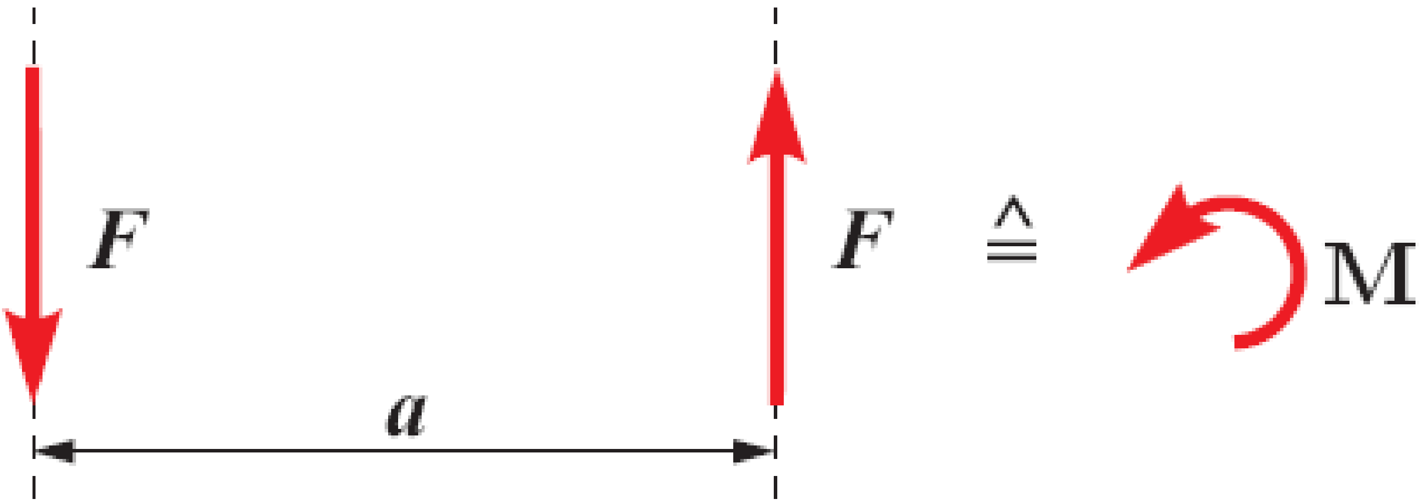
- Wenn die beiden Kräfte entgegengesetzten Richtungssinn haben, liegt die Wirkungslinie der Resultierenden ausserhalb.

Zusammensetzung von 2 Kräften: Wirkungslinien parallel

- Was passiert, wenn die Kräfte entgegengesetzt gerichtet und gleich groß sind ?

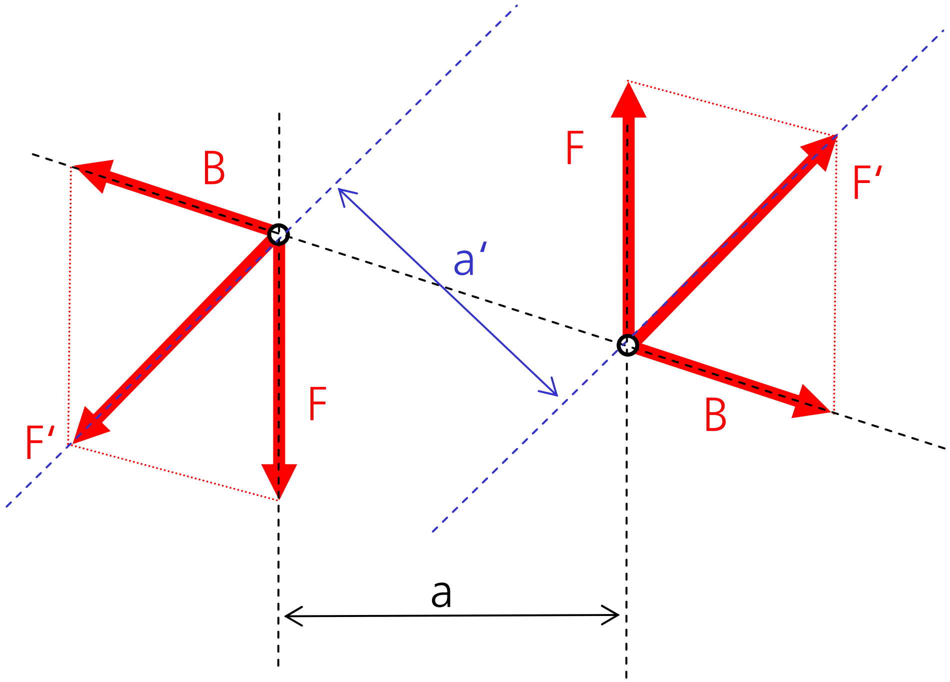


Zusammensetzung von 2 Kräften: Sonderfall Kräftepaar



- Zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte mit unterschiedlichen Wirkungslinien können nicht durch eine einzelne Kraft ersetzt werden.
- Man spricht von einem Kräftepaar mit dem Moment $M = F\,a$.

Kräftepaar



$$F\,a = F'\,a'$$

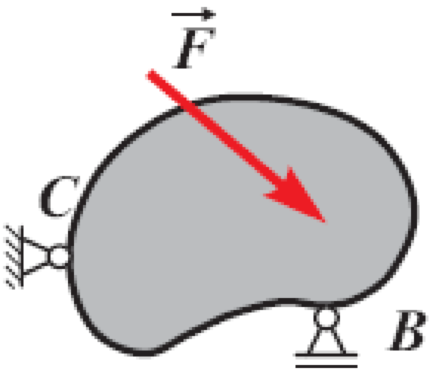
- Ein Kräftepaar kann durch ein anderes, äquivalentes ersetzt werden.
- Die Kräfte können dabei beliebige Richtung haben.
- Das Produkt aus Kraft und Hebelarm bleibt dabei erhalten.

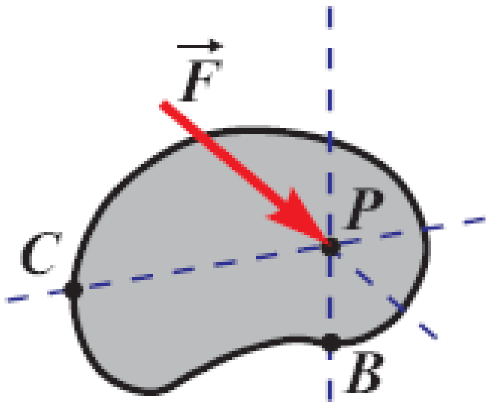
Gleichgewichtsbedingung

- Die Zusammensetzung von Kräften in der Ebene führt immer auf eine Resultierende oder ein Kräftepaar.

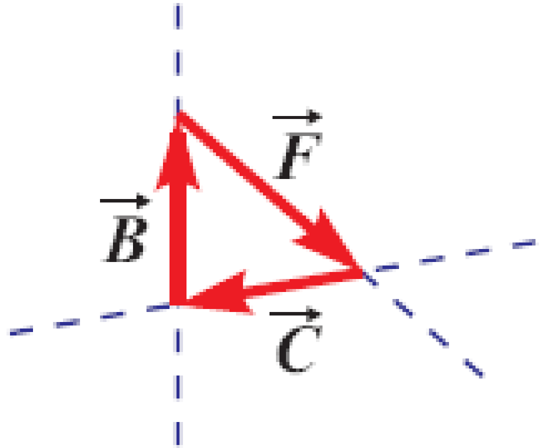
- Eine Gruppe von Kräften steht an einem starren Körper genau dann im Gleichgewicht, wenn sie äquivalent zur Kraft Null ist, d.h. wenn nach der Reduktion weder eine Resultierende, noch ein Kräftepaar übrig bleibt.

Beispiel: Körper mit drei Kraftangriffspunkten





Lageplan



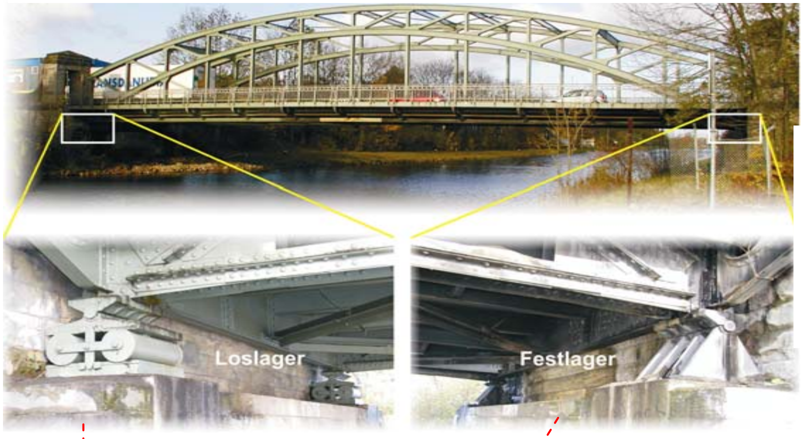
Kraftplan

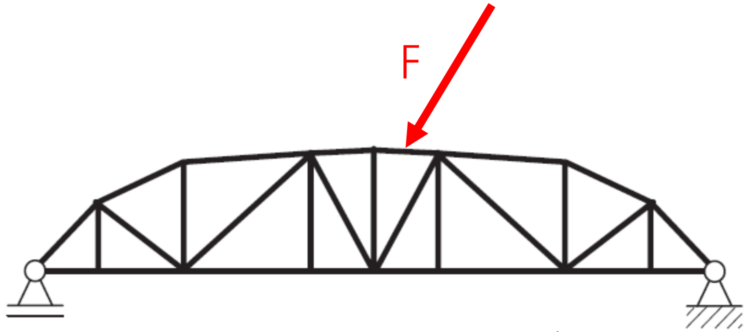
- Kraft F gegeben: Größe und Richtung bekannt
- Kraft B gesucht, Wirkungslinie bekannt
- Kraft C gesucht, Angriffspunkt bekannt

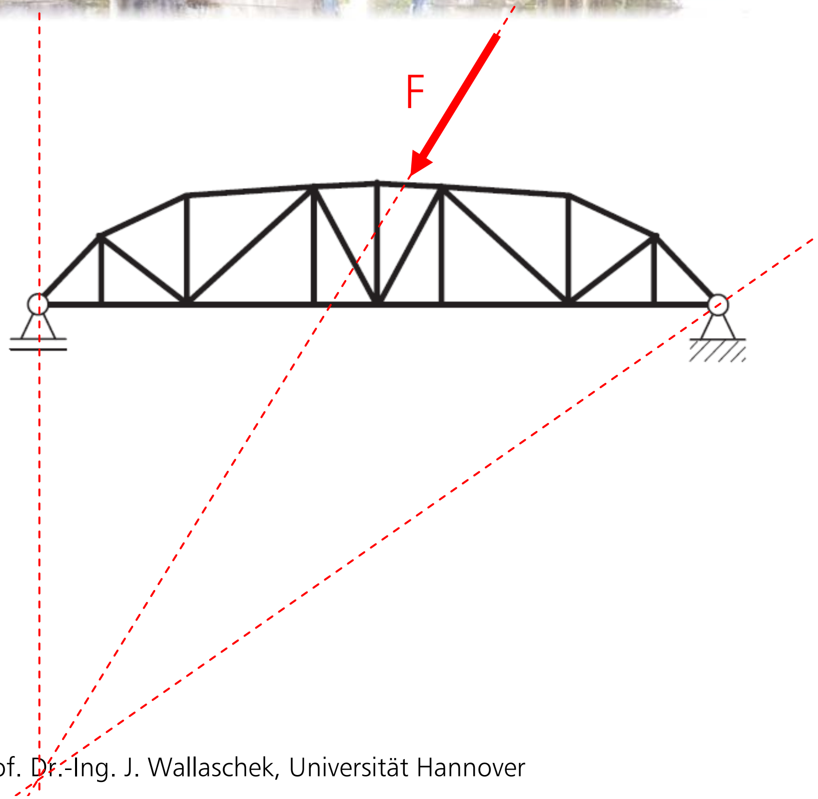
- Wirkungslinien von F und B schneiden sich,
- durch diesen Punkt muss auch die Wirkungslinie von C verlaufen,
- und damit ist die Wirkungslinie von C bestimmt

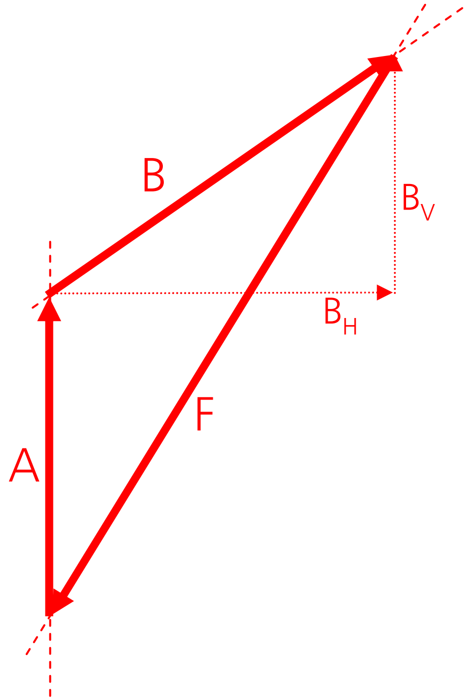
- Größe der Kräfte kann aus Kraftplan maßstäblich entnommen werden

Beispiel: Brücke in Hannover Linden



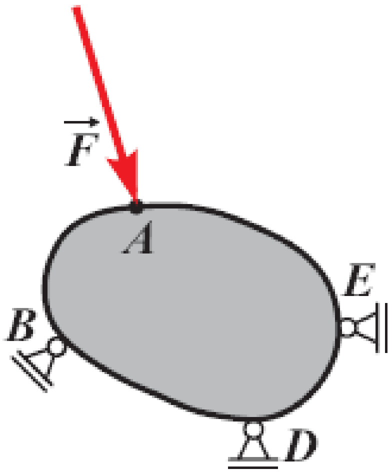


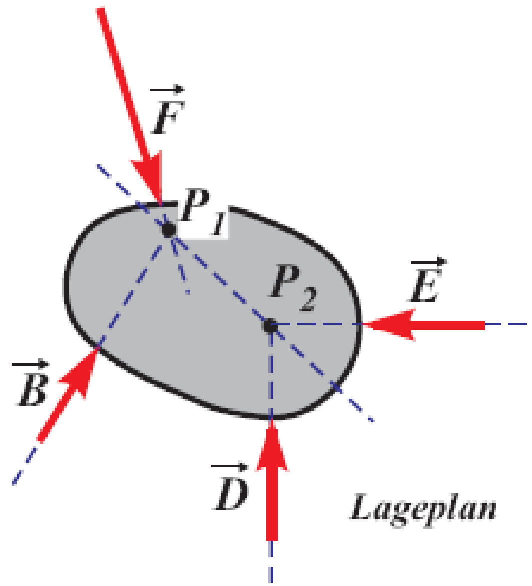


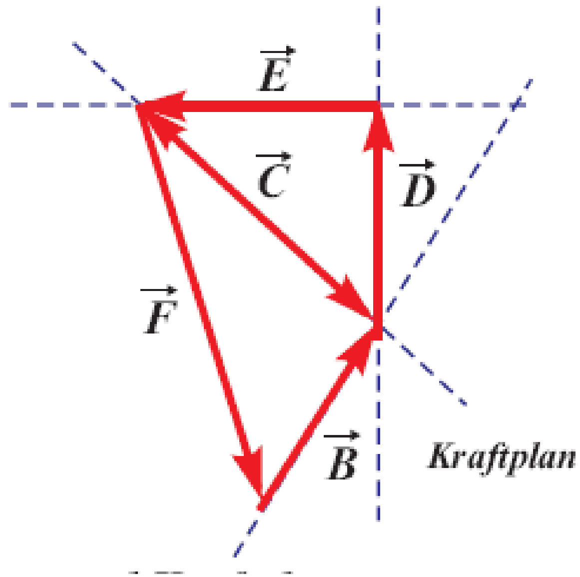


Institut für Dynamik und Schwingungen
Leibniz Universität Hannover

Körper mit vier Kraftangriffspunkten







- Kraft F gegeben: Größe und Richtung bekannt
- Kräfte B, D, E gesucht, Wirkungslinie bekannt

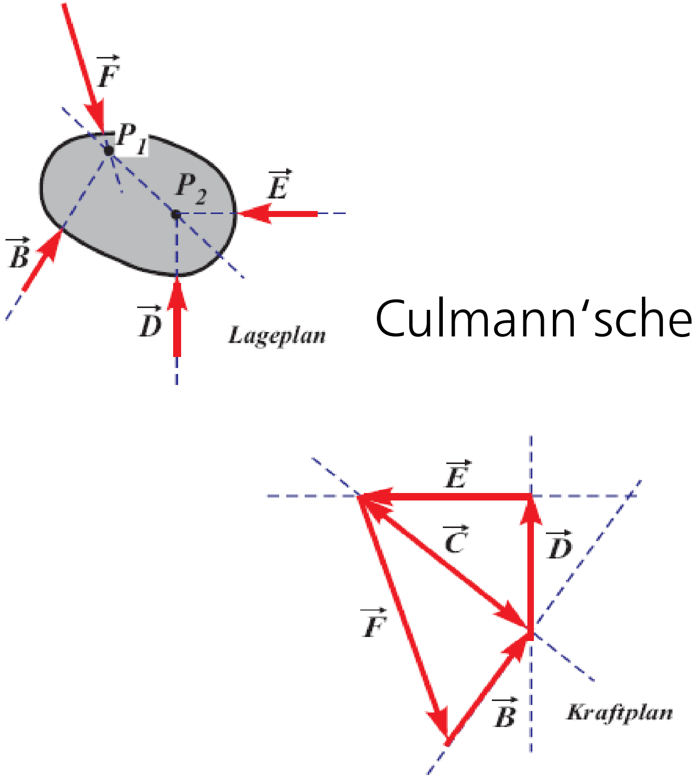
- Fasse die Kräfte jeweils paarweise zusammen
- Wirkungslinie der Resultierenden aus B und F verläuft durch P_1
- Wirkungslinie der Resultierenden aus D und E verläuft durch P_2

- Wenn das System im Gleichgewicht ist, müssen die beiden Zwischen-Resultierenden die gleiche Wirkungslinie haben und entgegen-gesetzt gleich groß sein

Karl Culmann

* 10. Juli 1821 in Bergzabern

† 9. Dezember 1881 in Riesbach/Zürich



Culmann'sche Gerade

(Grafik: http://www.kk.s.bw.schule.de/culmann/daten.htm)

Technische Mechanik

Moment einer Kraft

- A: beliebiger Punkt auf der Wirkungslinie der Kraft $\vec{F}$, P: beliebiger Punkt
- Moment der Kraft bezüglich des Punktes P

$$\vec{M}^{(P)} = \vec{r} \times \vec{F}$$

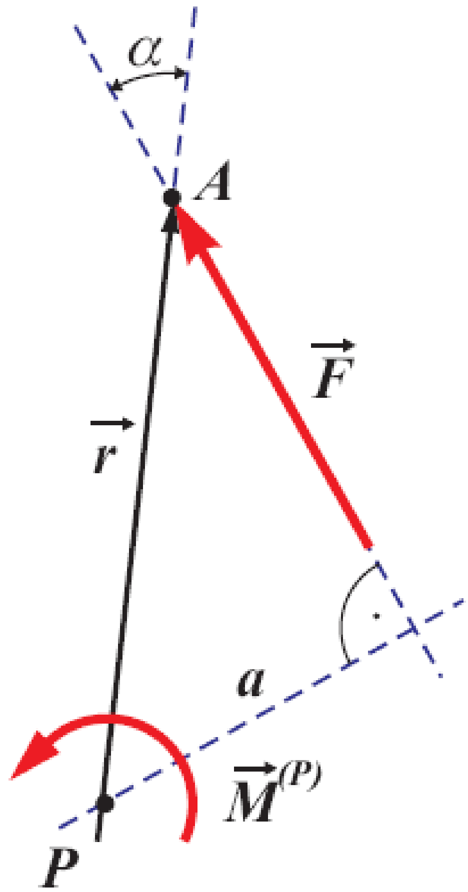
- mit dem Ortsvektor

$$\vec{r} = \overrightarrow{PA}$$

- Das Moment ist unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes A auf der Wirkungslinie

$$\left|\vec{M}^{(P)}\right| = |\vec{r}|\,\left|\vec{F}\right|\,|\sin\alpha| = \left|\vec{F}\right| a$$

- a: Hebelarm der Kraft bezüglich P (senkrechter Abstand der Wirkungslinie)

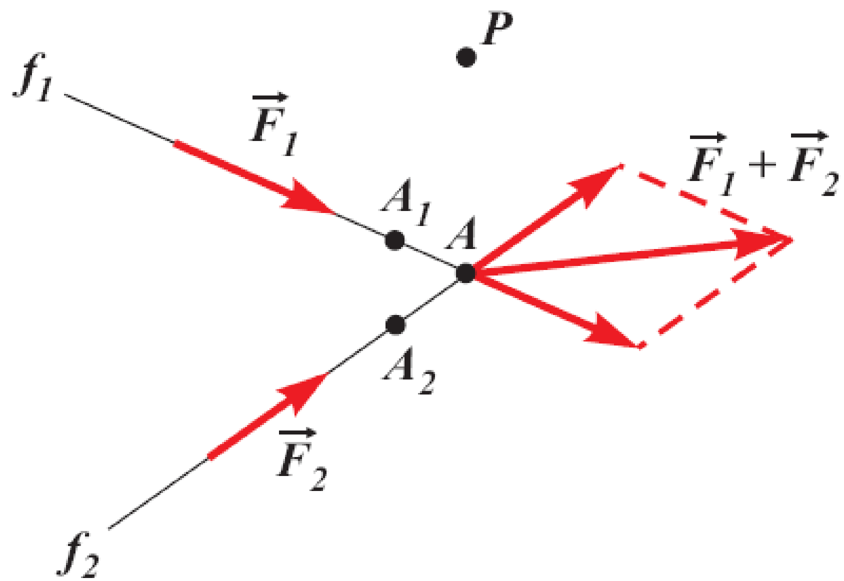


Moment von zwei Kräften

$$\left(\overrightarrow{PA_1} \times \vec{F}_1\right) + \left(\overrightarrow{PA_2} \times \vec{F}_2\right) =$$

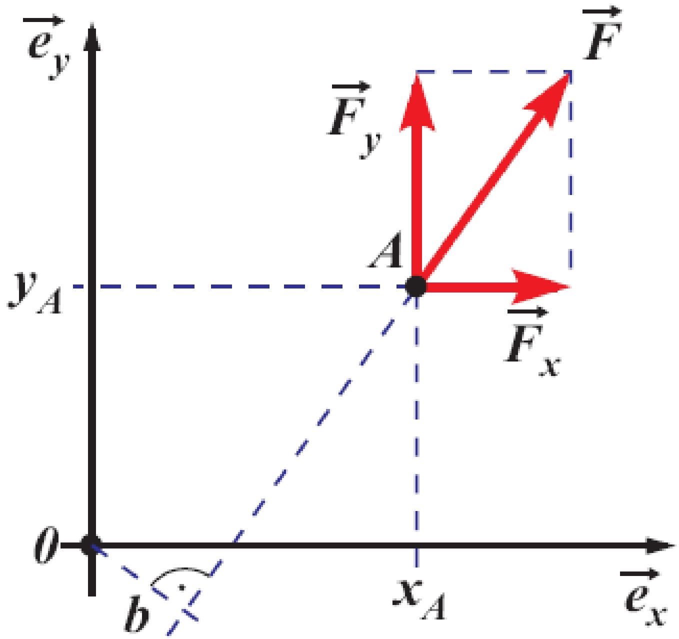
$$= \left(\overrightarrow{PA} \times \vec{F}_1\right) + \left(\overrightarrow{PA} \times \vec{F}_2\right) =$$

$$= \overrightarrow{PA} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)$$



- Die Summe der Momente ist gleich dem Moment der Resultierenden
- Das Moment einer Kraft ist gleich der Summe der Momente der Komponenten

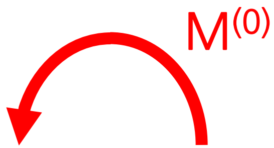
Moment einer Kraft: Komponentendarstellung in x-y-Ebene



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{0A} = x_A\vec{e}_x + y_A\vec{e}_y$$

$$\begin{aligned}\vec{M}^{(0)} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \left(x_A\vec{e}_x + y_A\vec{e}_y\right) \times \left(F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y\right) \\ &= \left(x_A F_y - y_A F_x\right)\vec{e}_z\end{aligned}$$



Institut für Dynamik und Schwingungen
Leibniz Universität Hannover

Technische Mechanik

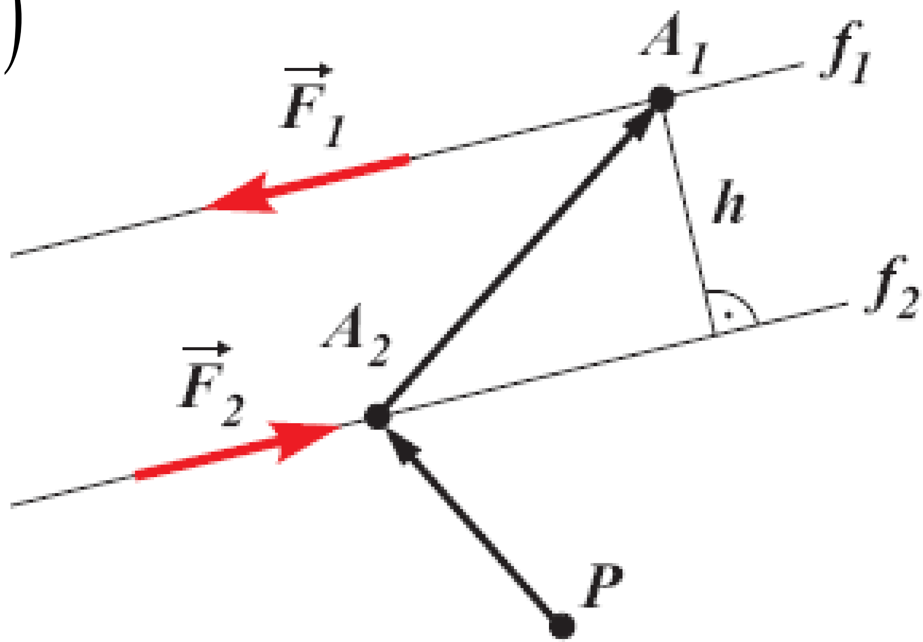
Moment eines Kräftepaares

$$\vec{M}^{(P)} = \left(\overrightarrow{PA_1} \times \vec{F}_1\right) + \left(\overrightarrow{PA_2} \times \vec{F}_2\right)$$

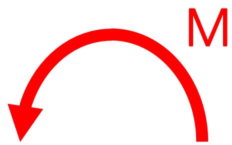
$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\vec{M}^{(P)} = \left(\overrightarrow{PA_1} - \overrightarrow{PA_2}\right) \times \vec{F}_1$$

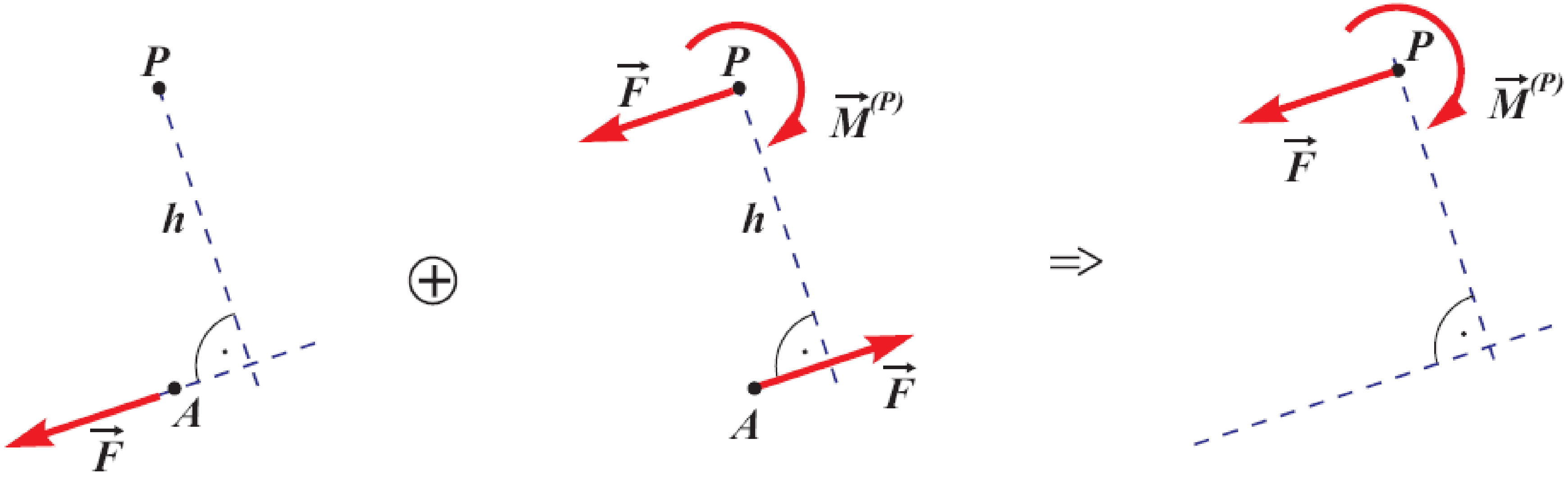
$$\vec{M}^{(P)} = \overrightarrow{A_2A_1} \times \vec{F}_1$$



- Das Moment eines Kräftepaares hängt nicht vom Bezugspunkt P ab.
- Am starren Körper können Kräftepaare beliebig verschoben werden.
- Das Moment eines Kräftepaares ist ein „freier“ Vektor.



Versetzungsmoment



$$\vec{M}^{(P)} = \overrightarrow{PA} \times \vec{F}$$

Institut für Dynamik und Schwingungen
Leibniz Universität Hannover

Technische Mechanik

Räumliche Kräftegruppe am starren Körper

Jede räumliche Kräftegruppe (A_i, $\vec{F}_i$, i = 1,2, … n) am starren Körper kann auf eine Resultierende

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

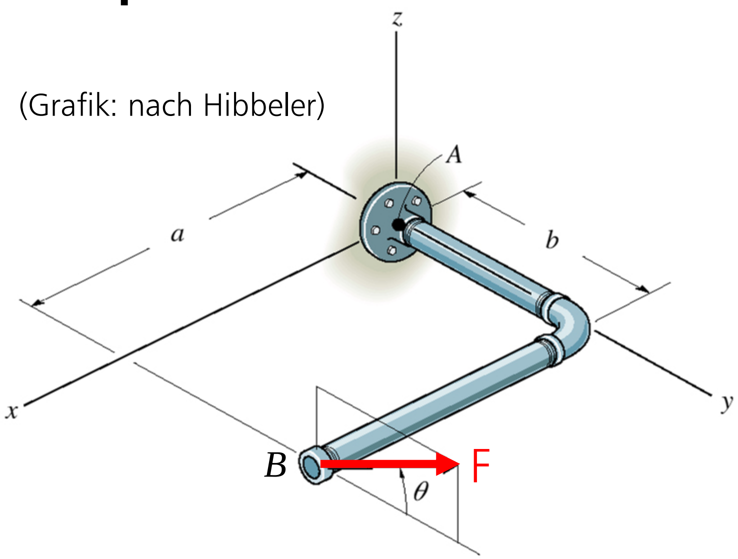
mit Angriffspunkt P und ein dazu gehörendes Kräftepaar mit Moment

$$\vec{M}^{(P)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{(P)} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PA_i} \times \vec{F}_i$$

reduziert werden.

Beispiel

(Grafik: nach Hibbeler)



Bestimme die zur Kraft F äquivalente Kraft im Punkt A und das dazu gehörende Versetzungsmoment.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{M}^{(P)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{(P)} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{PA_i} \times \vec{F}_i$$

$$\vec{R} = \vec{F} = F\cos\theta\,\vec{e}_y + F\sin\theta\,\vec{e}_z$$

Achtung: Hier entspricht der Punkt A in der Zeichnung dem Bezugspunkt P in der allgemeinen Formel, und der Angriffspunkt der Kraft F ist B:

$$\overrightarrow{AB} = a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y$$

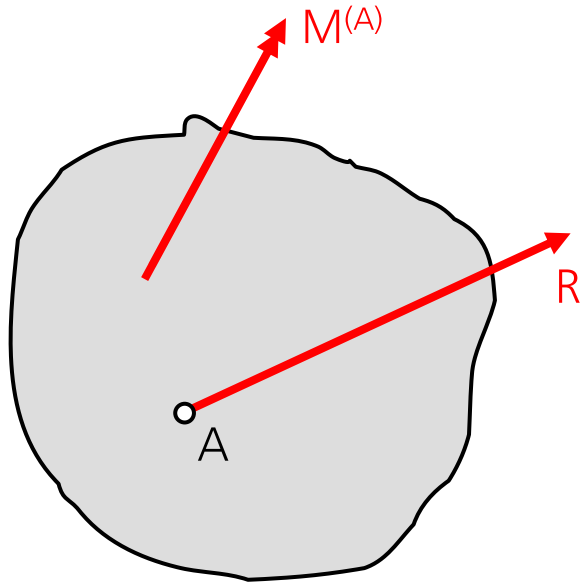
$$\vec{M}^{(A)} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \left(a\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y\right) \times \left(F\cos\theta\,\vec{e}_y + F\sin\theta\,\vec{e}_z\right)$$

$$= F\left(b\sin\theta\,\vec{e}_x - a\sin\theta\,\vec{e}_y + a\cos\theta\,\vec{e}_z\right)$$

Technische Mechanik

Dyname, Kraftwinder

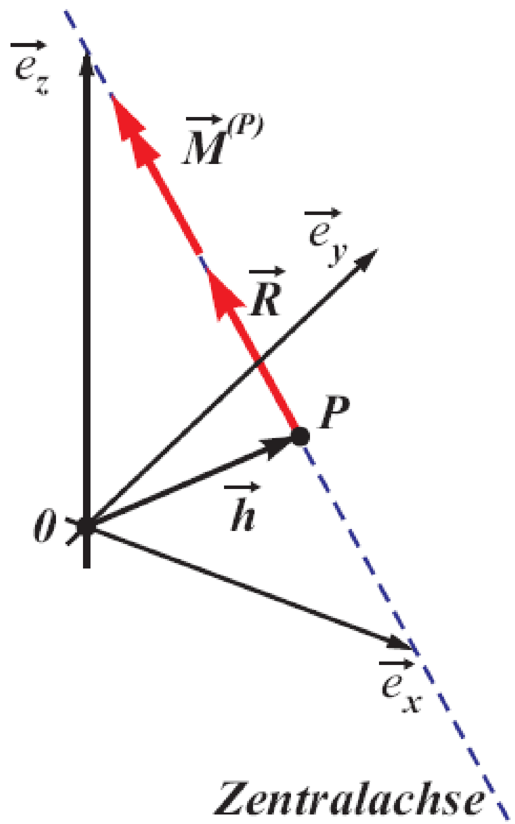
- Die Reduktion einer Kräftegruppe am starren Körper führt auf eine Resultierende und ein dazu gehörendes Moment.
- Die Resultierende ist unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes.
- Betrag und Richtung des Momentes hängen von der Wahl des Bezugspunktes ab.



Man bezeichnet das System $\left(\vec{R}, \vec{M}^{(A)}\right)$ aus einer Kraft und einem Moment als **Dyname** oder **Kraftwinder**.

Zentralachse, Kraftschraube

Idee: Wähle den Bezugspunkt P so, dass Resultierende und zugehöriges Moment die selbe Richtung haben. Dadurch wird die sog. Zentralachse der Kräftegruppe definiert.



Man bezeichnet das System $\left(\vec{R}, \vec{M}^{(P)}\right)$ aus einer Kraft und einem dazu parallelen Moment als Kraftschraube.

Zusammenfassung (1)

- Kräftesysteme sind äquivalent, wenn sie die gleichen Wirkungen hervorrufen.
- Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt addieren sich wie Vektoren. Ein Kraftsystem mit gemeinsamem Angriffspunkt (zentrale Kräftegruppe) ist im Gleichgewicht, wenn die Resultierende Null ist.
- Die am starren Körper von einer Kraft hervorgerufene Wirkung ändert sich nicht, wenn die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie verschoben wird.
- Die Zusammensetzung von Kräften in der Ebene führt immer auf eine Resultierende oder ein Kräftepaar.
- Eine Gruppe von Kräften steht an einem starren Körper genau dann im Gleichgewicht, wenn sie äquivalent zur Kraft Null ist, d.h. wenn nach der Reduktion weder eine Resultierende, noch ein Kräftepaar übrig bleibt

Zusammenfassung (2)

- Ein Kräftepaar besteht aus zwei gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Kräften, deren Wirkungslinien parallel sind.
- Das Moment eines Kräftepaares hängt nicht vom Bezugspunkt P ab. Ein Kräftepaar ist nicht an eine Wirkungslinie gebunden. Am starren Körper können Kräftepaare beliebig verschoben werden. Das Moment eines Kräftepaares ist ein „freier“ Vektor.
- Jede räumliche Kräftegruppe am starren Körper kann auf eine Resultierende mit Angriffspunkt P und ein dazu gehörendes Kräftepaar reduziert werden.
- Der Angriffspunkt der Resultierenden kann so gewählt werden, dass die resultierende Kraft und das zugehörige Moment die selbe Richtung haben (Zentralachse).
- Eine Kräftegruppe ist im Gleichgewicht, wenn die resultierende Kraft und das dazu gehörige Moment bezüglich eines beliebigen Punktes verschwinden.